

10 ビブラート

10.1 サイン波の複素数表現

オイラーの公式を用いると、指数関数は三角関数を用いて表わすことができる。

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j \sin(\theta)$$

この式より

$$\cos(\theta) = \Re\{e^{j\theta}\}$$

つまり、複素数の指数関数の実数部をとれば \cos 波となる。

演習 10-1 MATLAB の実数部をとる関数を調べて、複素数の指数関数 (例えば $\exp(j*2*\pi*440*t)$) であらわされた信号から \cos 波を計算せよ。

10.2 周波数成分の時間微分

$e^{jf(t)}$ という信号を考える。この $f(t)$ の部分を微分する。周波数 440Hz の音の場合、

$$f(t) = 2\pi 440t$$

である。この式を t で微分する。

$$\frac{df(t)}{dt} = 2\pi 440$$

すると、定数 (角周波数) となる。

$f(t)$ が定数でなく、時間変化する関数の場合、どうなるのか?

チャープ信号とよばれる信号がある。これは、周波数の低い値から高い値へ線形に変化する正弦波である。

つまり、 $f(t)$ の微分が線形 (=1 次式) になるということである。

$$\frac{df(t)}{dt} = at + b$$

したがって、

$$f(t) = \frac{a}{2}t^2 + bt + C$$

(C は定数)

正弦波では C は位相なので、ここでは 0 とすると

$$f(t) = \frac{a}{2}t^2 + bt$$

となる。

適当な a, b を設定すると、チャープ信号を作成することができる。

演習 10-2 1 秒間の間に 440Hz から 1760Hz に周波数が線形に変化する \cos 波を作成してみよ。(ヒント: まず、 $f(t)$ を決める。次に、その $f(t)$ を使って信号 $e^{jf(t)}$ を作成する。)

このように時間とともに周波数が変化する信号を周波数変調信号とよぶ。

10.3 ビブラート

ビブラートとは音の高さを少し上下させる演奏方法である。この上下の変化が正弦波のように変化する場合を考えてみる。この変化はつまり、時間とともに周波数が正弦波のように変化するということである。

cos 波にそのような変化を加える場合を考える。例えば、 a Hz を中心に、振幅 b 周波数 f_v の正弦波で上下する（つまり、最低 $a - b$ Hz、最高 $a + b$ Hz となる）場合とする。

$$\frac{df(t)}{dt} = a + b \sin(2\pi f_v t) \quad (1)$$

$$f(t) = at - \frac{b}{2\pi f_v} \cos(2\pi f_v t) \quad (2)$$

演習 10-3 440Hz を中心に、1 秒間に 4 回 5Hz 上下する cos 波を作ってみよ。

任意の音にビブラートをかける方法を考える。式 (2) を周波数に依存する部分と、そうでない部分に分離する。（つまり、 $f(t) = ag(t)$ という形に変形する。）

$$f(t) = ag(t) = at - \frac{b}{2\pi f_v} \cos(2\pi f_v t) \quad (3)$$

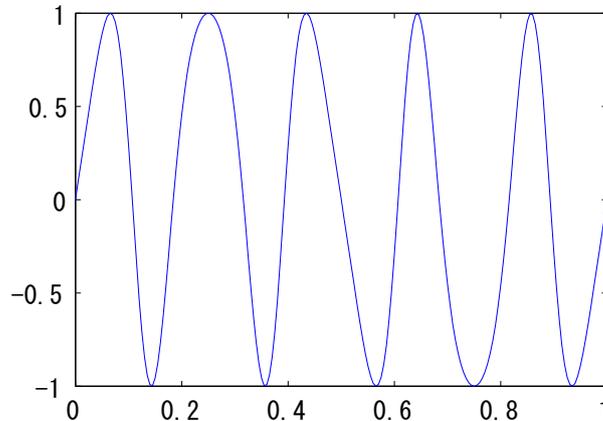
$$= a\left(t - \frac{b}{a} \frac{1}{2\pi f_v} \cos(2\pi f_v t)\right) \quad (4)$$

$$g(t) = t - \frac{p}{2\pi f_v} \cos(2\pi f_v t) \quad (5)$$

(ただし $p = b/a$ とする。)

$g(t)$ の効果がどのようなものなのか見てみる。

$f_v = 4, p = 0.4, a = 5$ として sin 波を作成してプロットしてみる。



少し歪んだような sin 波になっていることがわかる。 $g(t)$ に着目すればわかるが、これは時間 $f(t)$ 、つまり、 t より少し前後する時間の sin の値を t のときに出力する、ということである。

任意の関数（つまり任意の波形）でこの効果を実現するためには、波形が $x(t)$ であらわされるとすると、

$$x(t) = x(f(t))$$

とすればよい。

MATLAB では、実際には、 t は、例えば、サンプリング周波数が 8KHz の場合は $1/8000$ 秒おきに等間隔にしか存在しない。したがって、例えば、 $f(t)$ が $1/8000$ の倍数にならない場合、例えば、 $1.5/8000$ のような場合は、 $x(1.5/8000)$ の値を周辺の値（例えば、 $x(1/8000)$ と $x(2/8000)$ の値）を用いて計算する必要がある。このような計算を補間とよぶ。

MATLAB で補間をおこなう関数に `interp1` がある。

```
>> Fs=200;
>> x=0:1/Fs:1;
>> Y=sin(2*pi*5*x);
>> x1=x-0.4/(2*pi*4).*sin(2*pi*4*x);
>> plot(interp1(x,Y,x1));
>> hold on;
>> plot(sin(2*pi*5*x1), 'r')
```

プロットが重なることから、二つの `plot` が同じものをプロットしていることがわかる。

演習 10-4 ピッチのある音 (母音や音階のある楽器の音) に `interp1` を使ってビブラートをかけてみよ。