17 信号の複素指数関数表現

信号を複素数表現すると、ある種の操作や解析が簡単になることがある。cos 波を例に複素数表現を見てみる。オイラーの公式を用いると、複素指数関数は三角関数を用いて表わせる。

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta) \tag{18}$$

j は虚数単位を表わす。i でも構わない。電気分野では伝統的に j が用いられるため、信号処理の分野でも j が用いられることが多い。

式 (1) と同様の式の場合は次のようになる。

$$Ae^{j(2\pi ft)} = A\{\cos(2\pi ft) + j\sin(2\pi ft)\} \tag{19}$$

両辺の実数部を取る。

$$\mathfrak{Re}\{Ae^{j(2\pi ft)}\} = A\cos(2\pi ft) \tag{20}$$

つまり、複素指数関数の実数部をとると cos 波となる。

MATLAB でも、複素指数関数を用いて信号を生成できる。

ソースコード 18: 複素指数関数を用いた cos 波の生成

```
>> fs=8000;
>> t=0:1/fs:1;
>> cs=exp(j*2*pi*440*t);
>> y=__________(cs);
>> soundsc(y,fs)
>> plot(y(1:100))
```

練習 59 ソースコード 18 の下線部を埋めよ。

練習 60 MATLAB で複素指数表現を用いて次の信号を生成し、三角関数表現と同じ信号が得られることを確認せよ。

1. $y(t) = 0.5\cos(2\pi 440t) + 0.3\cos(2\pi 660t)$
2. $y(t) = 0.7\cos(2\pi 440t) + 0.1\cos(2\pi 440t + \frac{1}{3}\pi)$

18 周波数変調

18.1 瞬時周波数

$e^{jf(t)}$ という信号を考える。この式は例えば、式 (19) の $2\pi ft$ の部分が時間の関数とみなしたものである。周波数 440Hz の cos 波の場合は、

$$f(t) = 2\pi 440t \tag{21}$$

となる。この式を t で微分する。

$$\frac{df(t)}{dt} = 2\pi 440 \tag{22}$$

この値は t を含まない。つまり定数である。また、この値は、周波数に 2π をかけたものなので、角周波数である。

$f(t)$ が時間変化する関数の場合は、どうなるだろうか? チャープ信号とよばれる信号がある。これは、周波数が時間と共に変化する信号である。

例えば、時間と共に直線的に変化する場合を考える。つまり、$f(t)$ の微分が直線になる、ということである。

$$\frac{df(t)}{dt} = at + b \tag{23}$$

$f(t)$ を求めると次のようになる。

$$f(t) = \frac{a}{2}t^2 + bt + C \tag{24}$$

ここで、C は定数である。単一の cos 波では、C によって音が変わるわけではないので、とりあえず $C = 0$ とすると、$f(t)$ は次のようになる。

$$f(t) = \frac{a}{2}t^2 + bt \tag{25}$$

a, b の設定により、音の変化の仕方がかわる。

ソースコード 19: 線型チャープ信号の生成

```
>> a=_______;
>> b=_______;
>> t=0:1/fs:1;
>> f=a/2*______+b*t;
>> ch=______(exp(j*2*pi*f));
>> soundsc(ch,fs)
>> spectrogram(ch,hann(512),256,512,fs,'yaxis')
```

練習 61 ソースコード 19 の下線部を埋めよ。

正しく生成されると、スペクトログラムで周波数の直線的変化が確認できる。

チャープ信号には、2 次曲線のように変化するものなどもある。

練習 62 適当な曲線で周波数を変化させたチャープ信号を作成してみよ。

MATLAB では、代表的なチャープ信号を生成する関数として `chirp` が用意されている。

なお、式 (18) の θ の部分を微分したものを瞬時周波数とよぶ。

18.2 周波数変調

時間によって変化する周波数変化のことを周波数変調とよぶ。周波数変調の例を見てみる。

ビブラートとは、時間につれて、音の高さを少し上下させる演奏方法である。この上下の変化をサイン波のように変化させることを考えてみる。

例えば、a Hz を中心に、上下 b Hz で周波数 f_v の正弦波の形で変動することを考える。つまり、瞬時周波数が次のようになる。

$$\frac{df(t)}{dt} = a + b\sin(2\pi f_v t) \tag{26}$$

練習 63 式 (26) の $f(t)$ を求めよ。

$f(t)$ を使った周波数変調で、cos 波にビブラートをかけてみる。

ソースコード 20: 複素指数関数表現を用いたビブラートの生成

```
>> a=________;
>> b=________;
>> fv=_______;
>> fs=8000;
>> t=0:1/fs:1;
>> f=________________________________;
>> plot(diff(f))
>> vib=exp(j*2*pi*f);
>> y=___________(vib);
>> soundsc(y,fs)
```

`diff` は近似的な導関数を求める関数である。`f` が上手くできていれば、`plot(diff(f))` は正弦波のような形になる。

練習 64 440Hz を中心に、1 秒間に 4 回、10Hz で上下する cos 波を生成するように、**ソースコード 20** の下線部を埋めよ。

課題

以下の課題をパワーポイントファイルに作成し、授業支援システムのま Navi の第 6 回目の「準備課題」のところにアップロードすること。パワーポイントファイルは、18 ポイント以上の大きさの文字を使って作成すること。締切は 10/24(日) 午後 8 時とします。自動で締め切ってしまいますので、十分に注意して下さい。音を生成・加工する課題については、音データもパワーポイントのスライドに貼り付けるようにすること。

1. **練習 60** を解答せよ。
2. **練習 61** を解答せよ。
3. **練習 62** を解答せよ。
4. **練習 63** を解答せよ。
5. **練習 64** を解答せよ。
6. この資料を読んで、わからなかった点があれば、わからなかった点が解消されるような回答が期待できるような具体的な質問を考えて書くこと。(これに関しては、スライドではなく、別のファイルに作成してアップロードせよ)