17 信号の複素指数関数表現

信号を複素数表現すると、ある種の操作や解析が簡単になることがある。余弦波を例に複素数表現を見てみる。オイラーの公式を用いると、複素指数関数は三角関数を用いて表わせる。

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta) \tag{23}$$

j は虚数単位を表わす。i を用いてもよい。電気分野では伝統的に j が用いられるため、信号処理の分野でも j が用いられることが多い。

式 (1) と同様に周波数 f を用いた式の場合は次のようになる。

$$Ae^{j(2\pi ft)} = A\{\cos(2\pi ft) + j\sin(2\pi ft)\} \tag{24}$$

両辺の実数部を取る。

$$\mathfrak{Re}\{Ae^{j(2\pi ft)}\} = A\cos(2\pi ft) \tag{25}$$

つまり、複素指数関数の実数部をとると余弦波となる。

MATLAB でも、複素指数関数を用いて余弦波を生成できる。

ソースコード 31: 複素指数関数を用いた余弦波の生成

```
>> fs=8000;
>> t=0:1/fs:1;
>> cs=exp(j*2*pi*440*t);
>> y=real(cs);
>> soundsc(y,fs)
>> plot(y(1:100))
```

複素表現は位相の異なる波を加算する場合の説明に便利である。

位相を考慮した余弦波の式は次のようになる。

$$A\cos(2\pi ft + \phi) \tag{26}$$

これを指数関数表現すると次のように変形できる。

$$Ae^{j(2\pi ft+\phi)} = Ae^{j2\pi ft}e^{j\phi} \tag{27}$$

$e^{j\phi}$ は複素数であるが定数である。したがって $Ae^{j\phi}$ の部分は、t にかかわらず一定である。このような変形を用いると、同じ周波数の余弦波の加算を一般的に次の式で表せる。

$$\begin{aligned} Ae^{j(2\pi ft+\phi_1)} + Be^{j(2\pi ft+\phi_2)} &= Ae^{j2\pi ft}e^{j\phi_1} + Be^{j2\pi ft}e^{j\phi_2} \\ &= (Ae^{j\phi_1} + Be^{j\phi_2})e^{j2\pi ft} \end{aligned} \tag{28}$$

$(Ae^{j\phi_1} + Be^{j\phi_2})$ の部分は、やはり、t にかかわらず一定である。したがって、同じ周波数 f の余弦波を加算して作られる波は、振幅や位相にかかわらず同じ周波数 f となることがわかる。

18 周波数変調

18.1 瞬時周波数

複素数表現の $e^{jf(t)}$ という信号を考える。この式は例えば、式 (24) の $2\pi ft$ の部分を時間の関数とみなしたものである。周波数 440Hz の余弦波の場合は、次のようになる。

$$f(t) = 2\pi 440t \tag{29}$$

この式を t で微分する。

$$\frac{df(t)}{dt} = 2\pi 440 \tag{30}$$

この値は t を含まない。つまり定数である。また、この値は、周波数に 2π をかけたものなので、角周波数である。

$f(t)$ が時間変化する関数の場合は、どうなるだろうか? チャープ信号とよばれる信号がある。これは、周波数が時間と共に変化する信号である。

例えば、時間と共に直線的に変化する場合を考える。つまり、$f(t)$ の微分が直線、つまり t に関する一次関数になる、ということである。

$$\frac{df(t)}{dt} = at + b \tag{31}$$

$f(t)$ を求めると次のようになる。

$$f(t) = \frac{a}{2}t^2 + bt + C \tag{32}$$

ここで、C は定数である。単一の余弦波では、C によって音が変わるわけではないので、とりあえず $C = 0$ とすると、$f(t)$ は次のようになる。

$$f(t) = \frac{a}{2}t^2 + bt \tag{33}$$

a, b の設定により、音の変化の仕方がかわる。

ソースコード 32: 線型チャープ信号の生成

```
>> t=0:1/fs:1;
>> a=880;
>> b=440;
>> f=a/2*t.^2+b*t;
>> ch=real(exp(j*2*pi*f));
>> soundsc(ch,fs)
```

直線的な変化以外にも、2 次関数的に変化させるなど多様なチャープ信号がある。MATLAB では、代表的なチャープ信号を生成する関数として `chirp` が用意されている。

なお、式 (23) の θ の部分を微分したものを瞬時周波数とよぶ。

18.2 周波数変調

周波数を時間によって変化させることを周波数変調とよぶ。周波数変調としてビブラートの生成を考えてみる。

ビブラートとは、時間につれて、音の高さを少し上下させる演奏方法である。この上下の変化を正弦波のように変化させることを考えてみる。

例えば、正弦波の周波数が、周波数 a Hz を中心に、上下 b Hz で周波数 f_v の正弦波の形で変動することを考える。つまり、瞬時周波数が次のようになる。

$$\frac{df(t)}{dt} = a + b\sin(2\pi f_v t) \tag{34}$$

$f(t)$ を求めると次のようになる。

$$f(t) = at - \frac{b}{2\pi f_v}\cos(2\pi f_v t) \tag{35}$$

$f(t)$ を使った周波数変調で、余弦波にビブラートをかけてみる。

ソースコード 33: 複素指数関数表現を用いたビブラートの生成

```
>> a=440;
>> b=5;
>> fv=4;
>> fs=8000;
>> t=0:1/fs:1;
>> f=a*t-b/(2*pi*fv)*cos(2*pi*fv*t);
>> plot(diff(f))
>> vib=real(exp(j*2*pi*f));
>> soundsc(vib,fs)
```

`diff` は近似的に導関数を求める関数である。`f` が上手くできていれば、`plot(diff(f))` は意図通りに正弦波のような形になる。

18.3 任意の音の周波数変調

任意の音 (録音した音など) を周波数変調する方法を考える。式 (33) に基づくと、f_1 Hz から f_2 Hz まで 1 秒間で変化させる場合には、次の式のようになる。(式が複雑になるので、e^x を $\exp(x)$ と書く)

$$\begin{aligned}\exp\{j(2\pi f(t))\} &= \exp\{2\pi(\frac{f_2-f_1}{2}t^2+f_1t)\} \\ &= \exp j2\pi f_1(t+\frac{f_2-f_1}{2f_1}t^2) \qquad (36)\end{aligned}$$

f_1 がわかっていれば、この式をそのまま使える。しかし任意の音の場合、f_1 がわからない場合も多い。しかし、そのような場合も、元の音の m 倍まで変化させるという条件で変調すればよい、という場合には、式 (36) を次のように書き換えればよい。

$$\exp\{j2\pi f_1(t+\frac{m-1}{2}t^2)\} \qquad (37)$$

正弦波の式を t の関数 $f(t)$ である、と見ると

$$f(t) = \exp(j2\pi ft) \qquad (38)$$

である。式 (37) は、この式の右辺の t が $t+\frac{m-1}{2}t^2$ に変わったものである。この変調を $g(t)$ であらわすと次の式のようになる。

$$g(t) = t+\frac{m-1}{2}t^2 \qquad (39)$$

つまり、$f(t)$ を $g(t)$ で周波数変調するというのは、$f(g(t))$ と書ける。

ここで $m=2$ として、具体的に t を $g(t)$ に換えるというのはどういうことかを見てみる。

ソースコード 34: 周波数変調に用いる関数の変化

```
>> fs=20;
>> t=0:1/fs:1;
>> g=t+t.^2/2;
>> plot(t,t,t,g)
>> t(2)
ans =
    0.0500
>> g(2)
ans =
    0.0513
```

2 点目の値を見てみると、もとは 0.05 だったのが、$g(t)$ では、0.0513 と少し大きくなっている。これは、時刻 0.05s で元の信号の 0.0513s のときの値を出力するということを意味する。つまり、元の信号より少しずつ早く出力することになる。

自分で信号を 1 から作るような場合は、元の信号より少し早い値や遅い値もいくらでも計算できる。しかし録音した音の場合は、任意の時刻の点を計算できない。このような場合は、実際にわかっている値でその周辺の値を推定するしかない。つまり、先ほどの例では、`t(2) = 0.05`、`t(3)=0.1` なので、時刻 0.0513 に対応するデータはもともと存在しないので、計算して求めないといけない、ということである。

そのようなときに利用できる方法に補間がある。最も簡単な補間は、近くの点を直線で結んでその直線上に必要な点があるとして計算する線型補間である。

例えば、y という関数が $x=0$ のときに 3 $x=1$ のときに 5 という値であることがわかっているとする。このときに、$x=0.5$ のときの値が知りたいとする。すると、$(x,y)=(0,3),(1,5)$ を結ぶ直線の式を求めて、それに基づいて計算してやればよい。

MATLAB でこのような補間を計算する関数が `interp1` である。

```
>> x=[0 1];
>> y=[3 5];
>> x1=[0 0.5 1];
>> interp1(x,y,x1)
```

実行すると、$x=0.5$ に対応する値がわかるはずである。

この `interp1` を利用して、任意の音を 1 秒間で元の 2 倍の周波数にする (2 秒だと 4 倍というように、どんどん高くなる) のが、次のスクリプトである。

ソースコード 35: 任意の音の周波数変調

```
>> [y,fs]=wavread('a-.wav');
>> t=0:1/fs:(length(y)-1)/fs;
>> g=t+t.^2/2;
>> mody=interp1(t,y,g);
>> soundsc(mody,fs)
>> spectrogram(mody,hann(512),256,512,fs,'yaxis')
>> spectrogram(y,hann(512),256,512,fs,'yaxis')
```

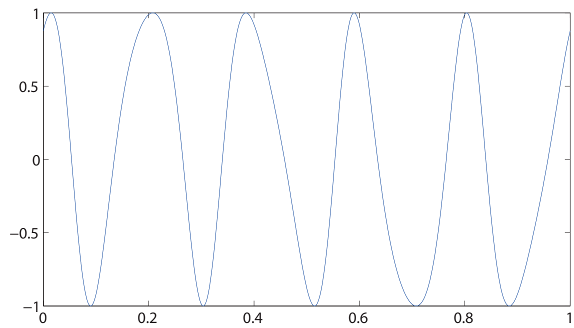
この考え方と同じように式 (35) を変形する。

$$\begin{aligned} f(t) = ah(t) &= at - \frac{b}{2\pi f_v}\cos(2\pi f_v t) \\ &= a(t - \frac{b}{a}\frac{1}{2\pi f_v}\cos(2\pi f_v t)) \\ h(t) &= t - \frac{p}{2\pi f_v}\cos(2\pi f_v t) \end{aligned} \tag{40}$$

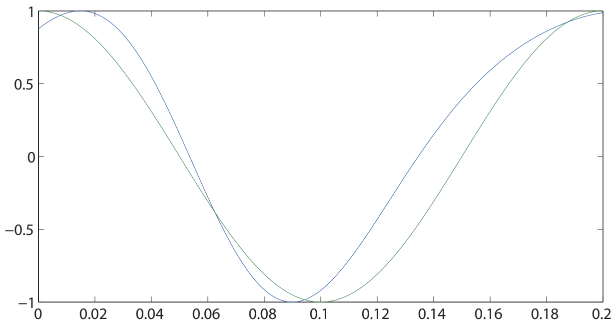
(ただし $p=b/a$ とする。)

このときの関数 $h(t)$ について、わかりやすいように、$f_v=4, p=0.4, a=5$ として**ソースコード 34** と同様に t と $h(t)$ を比較してみる。すると、$h(t)$ は t より遅れたり進んだりしていることがわかる。

その状態で $\cos(h(t))$ を生成してプロットしたのが次の図である。



少し歪んだような余弦波になっていることがわかる。どのように歪んでいるかをグラフを拡大して、元の正弦波と重ねてプロットすることで観察してみる。



緑色のグラフが余弦波であり、青色のグラフが変調したものである。0.06s までは青色の方が遅れているが、徐々に遅れが小さくなり、0.06s から 0.18s までは逆転して青色の方が進んでいる。

このようになる理由は、$h(t)$ に着目すればわかる。$h(t)$ は t から cos を引いた形になっている。つまり、時刻 t のときに、t より、少し前後する時間の値を t のときに出力する、ということである。これは時刻が歪んでいる、とみなすこともできる。つまり、もともとは均一の時間間隔で作られた波形の時間軸の間隔を時間により変化させていると考えるのである。

このような $h(t)$ による変調も `interp1` を上手く利用すると実現でき、高さがあるような任意の信号にビブラートをかけることができる。