

プロジェクト A 位相スペクトルを用いた周波数の推定 2012/05/23

信号をフーリエ変換するとそれぞれの周波数成分について振幅だけでなく位相も求まる。
位相の時間微分は (角) 周波数である。

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega = 2\pi f \quad (1)$$

この関係を用いると、信号が周期的な区間では、位相の差分を時間で割って周波数を近似できる。つまり、時刻 t_1 の位相を θ_1 、時刻 t_2 の位相を θ_2 とすると、 ω は次式のように近似できる。

$$\omega \approx \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} \quad (2)$$

したがって、 f は次のようになる。

$$f \approx \frac{\theta_2 - \theta_1}{2\pi(t_2 - t_1)} \quad (3)$$

例えば、440Hz の正弦波では、 2π 回転するのに、 $1/440s$ かかる。最初の $1/4\pi$ に到達する時刻は、 $1/3520s$ で、 $1/2\pi$ に到達する時刻は、 $2/3520s$ である。

$$\begin{aligned} \frac{\theta_2 - \theta_1}{2\pi(t_2 - t_1)} &= \frac{1/4\pi}{2\pi \times 1/3520} \\ &= 440 \end{aligned}$$

周波数が未知の信号の周波数を求める場合は、 t_1 から t_2 の間に何周期あるか (何回転するか) がわからない。したがって、次のように複数の候補の中から適切なものを選ぶことになる。

$$f_n \approx \frac{\theta_2 - \theta_1 + 2n\pi}{2\pi(t_2 - t_1)} \quad (4)$$

上記の例では、次のような計算となる。

$$\begin{aligned} \frac{\theta_2 - \theta_1 + 2n\pi}{2\pi(t_2 - t_1)} &= \frac{(1/4 + 2n)\pi}{2\pi \cdot 1/3520} \\ &= 440 + 3520n \end{aligned}$$

この関係を利用すると、近接するフレームに対して、それぞれ `fft` で求めた位相スペクトルを用いて周波数を推定できる。

```
>> fs=8000;
>> t=0:1/fs:1;
>> f=440;
>> y=sin(2*pi*f*t);
>> wsize=256;
>> n1=1;
>> t1=(n1-1)/fs;
>> n2=129;
>> t2=(n2-1)/fs;
>> s1=fft(y(n1:n1+wsize-1).*hann(wsize)');
>> plot(log(abs(s1)))
>> s2=fft(y(n2:n2+wsize-1).*hann(wsize)');
>> th1=angle(s1(15));
>> th2=angle(s2(15));
>> n=0:10;
>> (th2-th1+2*n*pi)/(2*pi*(t2-t1))

ans =

Columns 1 through 7

    2.5000    65.0000   127.5000   190.0000   252.5000   315.0000   377.5000

Columns 8 through 11

   440.0000   502.5000   565.0000   627.5000
```

このように、2.5, 65, 127.5, 190, 252.5, 315, 377.5, 440, 502.5, ... (Hz) と推測される。スペクトルのピークの位置から、この正弦波の周波数は $8000/256 \times 14 = 437.5$ 付近であると推定されるので、前述の候補から 440Hz が推定値となる。この信号の周波数は 440Hz であるから、この場合は、誤差なく求められた。

この手法は、純音 (正弦波) だけでなく、有声音の音声や音程が認知できる楽器音のように倍音構造 (高調波構造) を持つ信号の場合も小さい誤差で推定できることが知られている。